

إختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات**التمرين 01 : ( 05 نقاط )**نعتبر المكعب  $ABCDEFGH$  ضلعه 1.لتكن  $I$  مركز ثقل المربع  $ADHE$  و  $J$  مركز ثقل المربع  $ABCD$  ،  $K$  منتصف  $[IJ]$ نعتبر المعلم  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ .1 - عين إحداثيات النقاط  $I$  ،  $J$  ،  $K$  في المعلم  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ .2 - بين أن النقط  $A$  ،  $K$  و  $G$  ليست في إستقامة .3 - أ - بين أن المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $[IJ]$  هو المستوي  $(AKG)$  .ب - أعط معادلة ديكرتية للمستوي  $(AKG)$  .ج - تحقق أن النقطة  $D$  تنتمي للمستوي  $(AKG)$  .**التمرين 02 : ( 08 نقاط )**(I)  $g$  الدالة المعرفة على ، كما يلي :  $g(x) = e^x - x - 1$ .1 - أدرس إتجاه تغيرات الدالة  $g$  . ( لا يطلب حساب النهايات )2 - إستنتج إشارة  $g(x)$  و  $(e^x - x)$  .(II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على كما يلي :  $f(x) = x^2 - 2\ln(e^x - x)$ .1 - أ - تحقق أنه من أجل  $x \geq 0$  ، فإن :  $f(x) = x^2 - 2x - 2\ln(1 - xe^{-x})$  ، وأحسب :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  .ب - تحقق أنه من أجل  $x < 0$  ، فإن :  $f(x) = x^2 - 2\ln(-x) - 2\ln\left(1 - \frac{e^x}{x}\right)$  ، وأحسب :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  .2 - أ - تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ، فإن :  $f'(x) = \frac{2(x-1)}{e^x - x} \times g(x)$  .ب - إستنتج إتجاه تغيرات الدالة  $f$  ثم أنشئ جدول تغيراتها .3 - في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  نسمي  $(C_f)$  المنحنى البياني الممثل للدالة  $f$ و  $(\Delta)$  المماس للمنحنى  $(C_f)$  في النقطة ذات الفاصلة 0.أ - أكتب معادلة المماس  $(\Delta)$  .ب - أحسب  $f(1)$  ،  $f(2)$  ،  $f\left(\frac{3}{2}\right)$  .ج - بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقطع حامل محور الفواصل في نقطة تختلف عن المبدأ  $O$  فاصلتها  $\alpha$  ، حيث :  $1 < \alpha < \frac{3}{2}$  .د - أرسم  $(C_f)$  و  $(\Delta)$  .

**التمرين 03 : ( 07 نقاط )**

1 - حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة :  $z^2 - 6z + 13 = 0$  .  
المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  .

نعتبر النقاط  $A, B, C$  التي لواحقتها :  $a = 3 - 2i$  ،  $b = 3 + 2i$  ،  $c = 4i$  ، على الترتيب .

1 - علم النقاط  $A, B, C$  في المعلم  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  .

2 - بين أن الرباعي  $OABC$  متوازي أضلاع .

3 - عين لاحقة النقطة  $\Omega$  مركز ثقل الرباعي  $OABC$  .

4 - عين ثم أرسم مجموعة النقاط  $M$  من المستوي حيث :  $\|\vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 12$  .

5 - لتكن  $M$  نقطة من المستقيم  $(AB)$  .

نرمز بـ  $\beta$  إلى الجزء التخيلي للاحقة النقطة  $M$  ولتكن  $N$  صورة النقطة  $M$  بالدوران الذي مركزه  $\Omega$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$  .

أ - بين أن لاحقة النقطة  $N$  هي :  $z_N = \frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i$  .

ب - كيف يمكن إختيار  $\beta$  حتى تنتمي النقطة  $N$  إلى المستقيم  $(BC)$  ؟

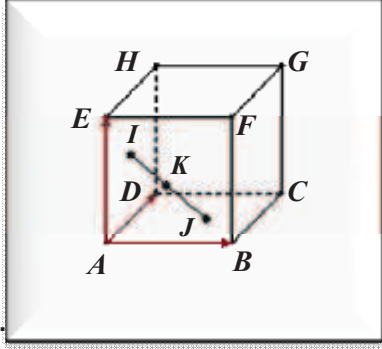
إنته

بالتوفيق

$$\text{تذكير : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty , \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 , \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

لتكن  $I$  مركز ثقل المربع  $ADHE$  و  $J$  مركز ثقل المربع  $ABCD$   
 $K$  منتصف  $[IJ]$ .

نعتبر المعلم  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$ .



1 - تعيين إحداثيات النقاط  $I, J, K$  في المعلم  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$  :

لدينا :  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$  وعليه :  $I\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$  وعليه :  $J\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$

$K$  منتصف قطعة المستقيم  $[IJ]$  وعليه :  $K\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$

2 - لنبين أن النقاط  $A, K$  و  $G$  ليست في استقامة :

لدينا :  $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$  وعليه :  $G(1; 1; 1)$

يكون عندئذ :  $\overrightarrow{AG}(1; 1; 1)$  و  $\overrightarrow{AK}\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$

الشعاان  $\overrightarrow{AG}$  و  $\overrightarrow{AK}$  غير مرتبطين خطيا وعليه النقاط  $A, K$  و  $G$  ليست في استقامة

3 - أ - لنبين أن المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $[IJ]$  هو المستوي  $(AKG)$  :

لدينا :  $AI = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  و  $AJ = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

إذن النقطة  $A$  تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $[IJ]$

ولدينا أيضا :  $GI = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$  و  $GJ = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

إذن النقطة  $G$  تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $[IJ]$

ولدينا أيضا :  $K$  منتصف قطعة المستقيم  $[IJ]$

إذن النقطة  $K$  تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $[IJ]$

الخلاصة : المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $[IJ]$  هو المستوي  $(AKG)$

ب - معادلة ديكارتية للمستوي  $(AKG)$  :

بما أن المستوي  $(AKG)$  هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $[IJ]$  فإن الشعاع  $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{1}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right)$  شعاع

ناظمي للمستوي  $(AKG)$

معادلة المستوي  $(AKG)$  تكتب عندئذ على الشكل :  $\frac{1}{2}x + 0y - \frac{1}{2}z + d = 0$  ، حيث  $d$  عدد حقيقي

0.25..... بما أن  $A$  تنتمي إلى المستوي  $(AKG)$  فإن :  $\frac{1}{2}(0) - \frac{1}{2}(0) + d = 0$  ، أي :  $d = 0$  .

0.25..... الخلاصة : معادلة المستوي  $(AKG)$  هي :  $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z = 0$  ، أي :  $x - z = 0$  .  
ج - التحقق أن النقطة  $D$  تنتمي للمستوي  $(AKG)$  :

0.25..... لدينا من جهة :  $\overrightarrow{AD} = 0\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 0\overrightarrow{AE}$  وعليه :  $D(0;1;0)$

0.25..... ومن جهة أخرى :  $0 - 0 = 0$  ، إذن  $D$  تنتمي للمستوي  $(AKG)$  .  
التمرين 02 :

(I)  $g$  الدالة المعرفة على ، كما يلي :  $g(x) = e^x - x - 1$  .

1 - دراسة اتجاه تغيرات الدالة  $g$  :

0.25..... اتجاه التغير : الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$  ، لدينا :  $g'(x) = e^x - 1$  .

$$g'(x) = 0 \text{ تكافئ : } e^x - 1 = 0 \text{ ، أي : } x = 0 \quad \checkmark$$

$$g'(x) > 0 \text{ تكافئ : } e^x - 1 > 0 \text{ ، أي : } x > 0 \quad \checkmark$$

$$g'(x) < 0 \text{ تكافئ : } e^x - 1 < 0 \text{ ، أي : } x < 0 \quad \checkmark$$

0.25..... وعليه : الدالة  $g$  متزايدة تماما على المجال  $[0; +\infty[$  ومتناقصة تماما على المجال  $]-\infty; 0]$  .

0.25..... جدول تغيرات الدالة  $g$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$		$\searrow$ $0$ $\nearrow$	

2 - تعيين إشارة  $g(x)$  و  $(e^x - x)$  : من الدراسة السابقة نستنتج أن :

0.5..... من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ، فإن :  $g(x) \geq 0$  .

إذن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ، فإن :  $e^x - x - 1 \geq 0$  .

0.5..... وعليه : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ، فإن :  $e^x - x \geq 1$  .

(II)  $f$  الدالة العددية المعرفة كما يلي :  $f(x) = x^2 - 2\ln(e^x - x)$  .

2 - أ - التحقق أنه من أجل  $x \geq 0$  ، فإن :  $f(x) = x^2 - 2x - 2\ln(1 - x e^{-x})$  .

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ، حيث :  $x \geq 0$  ، لدينا :

$$f(x) = x^2 - 2\ln(e^x - x) = x^2 - 2\ln[e^x(1 - x e^{-x})] = x^2 - 2[\ln e^x + \ln(1 - x e^{-x})]$$

$$= x^2 - 2\ln e^x - 2\ln(1 - x e^{-x}) = x^2 - 2x - 2\ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)$$

حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  :

0.25.....  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x^2 - 2 \ln x - 2 \ln \left( 1 + \frac{x}{e^x} \right) \right] = +\infty$

ب - التحقق أنه من أجل  $x < 0$  ، فإن :  $f(x) = x^2 - 2 \ln(-x) - 2 \ln \left( 1 - \frac{e^x}{x} \right)$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ، حيث :  $x < 0$  ، لدينا :

$$f(x) = x^2 - 2 \ln(e^x - x) = x^2 - 2 \ln \left[ -x \left( 1 - \frac{e^x}{x} \right) \right] = x^2 - 2 \left[ \ln(-x) + \ln \left( 1 - \frac{e^x}{x} \right) \right]$$

0.5.....

$$= x^2 - 2 \ln(-x) - 2 \ln \left( 1 - \frac{e^x}{x} \right)$$

0.25..... حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ x^2 - 2 \ln(-x) - 2 \ln \left( 1 - \frac{e^x}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ x \left( x + 2 \frac{\ln(-x)}{-x} \right) - 2 \ln \left( 1 - \frac{e^x}{x} \right) \right] = +\infty$$

3 - أ - التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ، فإن :  $f'(x) = \frac{2(x-1)}{e^x - x} \times g(x)$

الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$  ، لدينا :

$$f'(x) = 2x - 2 \times \frac{e^x - 1}{e^x - x} = \frac{2x(e^x - x) - 2e^x + 2}{e^x - x} = \frac{2xe^x - 2e^x - 2x^2 + 2}{e^x - x}$$

0.5.....

$$= \frac{2e^x(x-1) - 2(x^2-1)}{e^x - x} = \frac{2(x-1)(e^x - x - 1)}{e^x - x} = \frac{2(x-1)}{e^x - x} \times g(x)$$

ب - إستنتاج إتجاه تغيرات الدالة  $f$  : من النتيجة السابقة ومن نتيجة السؤال (I) - 2 - لدينا :

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ، فإن :  $g(x) \geq 0$  و  $e^x - x \geq 1$  .

ومنه نستنتج :  $\diamond f'(x) = 0$  ، تكافئ :  $x = 1$

0.5.....  $\diamond f'(x) > 0$  ، تكافئ :  $x > 1$   $\diamond f'(x) < 0$  ، تكافئ :  $x < 1$

0.25..... الدالة  $f$  متزايدة تماماً على المجال  $[1; +\infty[$  ومتناقصة تماماً على المجال  $] -\infty; 1]$

0.25..... جدول تغيرات الدالة  $f$  : لدينا :  $f(1) = 1 - 2 \ln(e - 1) \approx -0.073$

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$		$0$	$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$		$f(1)$	$+\infty$

0.25..... 6 - أ - معادلة المماس  $(\Delta)$  :  $y = 0$  :  $(\Delta)$

0.75..... ب :  $f(1) \approx -0.08265$   $\Rightarrow f(2) \approx 0.63122$   $\Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0.06502$

ج - لنبين أن  $(C_f)$  يقطع حامل محاور الفواصل في نقطة تختلف عن المبدأ  $O$  فاصلتها  $\alpha$ ، حيث:  $1 < \alpha < \frac{3}{2}$ :

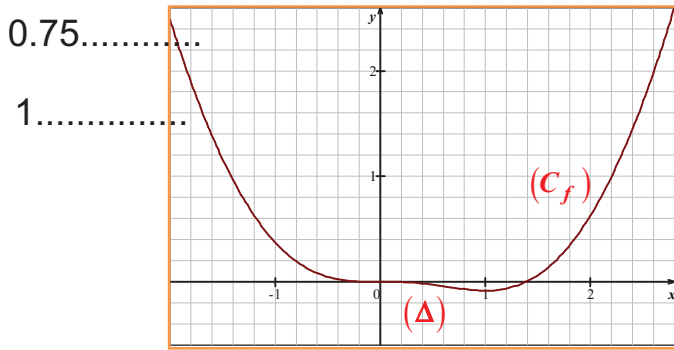
لدينا من جهة  $f(0) = 0$  ومن جهة أخرى:

الدالة  $f$  مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $[1; +\infty[$ ، فهي إذن مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $\left[1; \frac{3}{2}\right]$

ولدينا:  $0 < f\left(\frac{3}{2}\right) \times f(1) < 0$ ، أي:  $f\left(\frac{3}{2}\right) > 0 > f(1)$ .

تطبيقا لمبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة  $f(x) = 0$ ، تقبل حلا وحيدا  $\alpha$ ، حيث:  $1 < \alpha < \frac{3}{2}$ .

وهذا يعني أن المنحنى  $(C_f)$  يقطع حامل محاور الفواصل في المبدأ  $O$  ونقطة فاصلتها  $\alpha$



حيث:  $1 < \alpha < \frac{3}{2}$  .....

د - رسم  $(C_f)$  و  $(\Delta)$  : .....

ملاحظة: المبدأ  $O(0;0)$  نقطة إنعطاف للمنحنى  $(C_f)$ .

### التمرين 03 :

1- الحل في المعادلة:  $z^2 - 6z + 13 = 0$

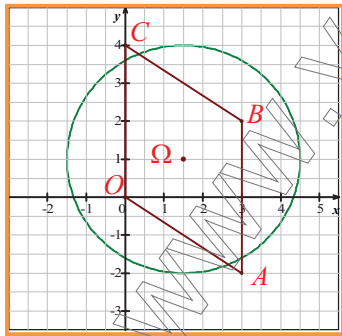
لدينا:  $\Delta = (-6)^2 - 4(1)(13) = 36 - 52 = -16 = 16i^2 = (4i)^2$  .....

وعليه للمعادلة  $z^2 - 6z + 13 = 0$  حلين مركبين مترافقين هما:  $z_1 = \frac{6+4i}{2} = 3+2i$ ،  $z_2 = 3-2i$  .....

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

$A, B, C$  و النقاط التي لواحقتها:  $a = 3-2i$ ،  $b = 3+2i$ ،  $c = 4i$ ، على الترتيب.

2- تعليم النقط  $A, B, C$  في المعلم  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  : .....



3 - لنبين أن الرباعي  $OABC$  متوازي أضلاع :

لدينا:  $OA = |a - 0| = |3 - 2i| = \sqrt{13}$

$$AB = |b - a| = |(3 + 2i) - (3 - 2i)| = |4i| = 4$$

$$BC = |c - b| = |(4i) - (3 + 2i)| = |-3 + 2i| = \sqrt{13}$$

$$OC = |c - 0| = |4i| = 4$$

بما أن  $OA = BC$  و  $AB = OC$ ، فإن الرباعي  $OABC$  متوازي أضلاع .....

4 - تعيين لاحقة النقطة  $\Omega$  مركز ثقل الرباعي  $OABC$  :

نسمي  $z_\Omega$  لاحقة النقطة  $\Omega$ ، يكون عندئذ :

$$z_\Omega = \frac{z_O + z_A + z_B + z_C}{4} = \frac{0 + 3 - 2i + 3 + 2i + 4i}{4} = \frac{6 + 4i}{4} = \frac{3}{2} + i$$

5 - تعيين مجموعة النقط  $M$  من المستوي حيث:  $\|\vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 12$  :

... 5 / 4 ...

نعلم أن :  $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4M\Omega$  ( أنظر خواص المرجح )

وعليه :  $\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 12$  تكافئ :  $\|4M\Omega\| = 12$  أي :  $\Omega M = 3$  ..... 0.25

مجموعة النقط  $M$  من المستوي حيث :  $\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 12$  هي الدائرة التي مركزها  $\Omega$  ونصف

قطرها 3 . ( أنظر الشكل السابق ) ..... 0.5

6 - لتكن  $M$  نقطة من المستقيم  $(AB)$  . نرمز بـ  $\beta$  إلى الجزء التخيلي للاحقة النقطة  $M$  ولتكن  $N$  صورة النقطة  $M$  بالدوران الذي مركزه  $\Omega$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$  .

أ - لنبين أن لاحقة النقطة  $N$  هي :  $z_N = \frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i$  :

بما أن  $M$  من المستقيم  $(AB)$  و  $\beta$  الجزء التخيلي للاحقة النقطة  $M$  ، فإن لاحقتها هي :  $z_M = 3 + i\beta$  ..... 0.25

- الكتابة المركبة الدوران  $r$  الذي مركزه  $\Omega$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$  تكتب على الشكل :  $z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z + b$  ، حيث  $b$  عدد مركب .

لدينا :  $r(\Omega) = \Omega$  وعليه :  $z_\Omega = e^{i\frac{\pi}{2}}z_\Omega + b = iz_\Omega + b$  ، أي :  $\frac{3}{2} + i = i\left(\frac{3}{2} + i\right) + b$  :

ومنه :  $b = \frac{3}{2} + i - i\left(\frac{3}{2} + i\right) = \frac{3}{2} + i - \frac{3}{2}i + 1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$  ..... 0.25

الكتابة المركبة الدوران  $r$  الذي مركزه  $\Omega$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$  تكتب عندئذ على الشكل :  $z' = iz + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$  ..... 0.5

$N$  صورة النقطة  $M$  بالدوران  $r$  إذن :  $z_N = iz_M + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$  أي :

..... 0.5  $z_N = i(3 + i\beta) + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}i = 3i - \beta + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i$

ب - إختيار  $\beta$  حتى تنتمي النقطة  $N$  إلى المستقيم  $(BC)$  :

النقطة  $N$  إلى المستقيم  $(BC)$  تعني أن النقط  $N$  ،  $B$  و  $C$  في إستقامة .

ونعلم أن النقط  $N$  ،  $B$  و  $C$  في إستقامة تعني أن  $\frac{z_N - z_C}{z_B - z_C}$  عدد حقيقي ..... 0.25

لدينا :

..... 0.75  $\frac{\frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i - 4i}{3 + 2i - 4i} = \frac{\frac{5}{2} - \beta - \frac{3}{2}i}{3 - 2i} = \frac{1}{2} \times \frac{5 - 2\beta - 3i}{3 - 2i} \times \frac{3 + 2i}{3 + 2i}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{3(5 - 2\beta) + 6 + i(2(5 - 2\beta) - 9)}{13} = \frac{1}{2} \times \frac{21 - 6\beta + i(1 - 4\beta)}{13}$

..... 0.25 إذن :  $\frac{z_N - z_C}{z_B - z_C}$  عدد حقيقي تعني أن  $1 - 4\beta = 0$  ، أي :  $\beta = \frac{1}{4}$

..... 0.25 تكون عندئذ لاحقة النقطة  $N$  هي :  $z_N = \frac{5}{2} - \frac{1}{4} + \frac{5}{2}i = \frac{9}{4} + \frac{5}{2}i$

تم نشر هذا الملف بواسطة قرص **تجربتي** مع الباكالوريا

[tajribatybac@gmail.com](mailto:tajribatybac@gmail.com)

[facebook.com/tajribaty](https://facebook.com/tajribaty)

[jjel.tk/bac](http://jjel.tk/bac)